

Lösningar till aktiviteter i kapitel 2

- p : Sverige vinner mot Ryssland
 q : Sverige får möta Holland i kvartsfinalen
 r : Sverige förlorar mot Ryssland
 s : Ryssland får möta Holland i kvartsfinalen

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)$$

2.

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$
F	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
T	T	F	T

Den sista kolonnen överensstämmer med kolonnen för $P \rightarrow Q$.

3.

p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	p	q	r	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
F	F	F			F	T	F		
F	F	T	T	F	F	T	T		
T	F	F			T	T	F		
T	F	T			T	T	T		

4.

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	
F	F	F	T	$F \rightarrow F$
T	F	F	T	$F \rightarrow T$
F	T	F	T	$F \rightarrow F$
T	T	T	T	$T \rightarrow T$

5.

P	Q	R	$P?Q:R$	P	Q	R	$P?Q:R$
F	F	F	F	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	F	F	F	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T

$$P?Q:R \triangleq (P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$$

6.

$$\begin{aligned}
 p \wedge q \vee r \rightarrow \neg s \vee t \leftrightarrow u &= (((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (\neg s \vee t)) \leftrightarrow u \\
 \neg p \rightarrow q \leftrightarrow r \vee \neg s &= ((\neg p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \vee \neg s))
 \end{aligned}$$

7.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \rightarrow \neg q$	$\neg p \rightarrow q$	$(\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$	R
F	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	T
T	T	F	F	T	T	T	T

8. Det andra uttrycket är alltid sant. Det första är falskt om $p = T$ och $q = F$.

9.

$$p \rightarrow (q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \quad \text{ja}$$

$$(p \wedge q) \rightarrow r \leftrightarrow (p \rightarrow r) \wedge (p \rightarrow q) \quad \text{nej}$$

10. När $p = q = r = F$

$$11. \quad \frac{\frac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q} \quad \frac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q}}{p} \quad \frac{\frac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q} \quad \frac{(p \wedge q) \wedge r}{p \wedge q}}{q \wedge r} \quad \frac{(p \wedge q) \wedge r}{r}$$

$$p \wedge (q \wedge r)$$

$$12. \quad \frac{\frac{[p] \quad p \rightarrow q}{q} [\rightarrow E] \quad q \rightarrow r}{r} [\rightarrow E] \quad \frac{r}{p \rightarrow r} [\rightarrow I]$$

$$13. \quad \frac{p \vee (q \wedge r) \quad \frac{[p] \quad q}{p \vee q}}{p \vee q}$$

$$14. \quad \frac{\frac{[p]}{p \vee \neg p} [\vee I] \quad \frac{[p] \quad q}{p \vee q} [\vee I] \quad \frac{[p] \quad q}{p \vee q} [\vee I] \quad \frac{[p] \quad q}{p \vee q} [\vee I]}{\neg p} [\neg I] \quad \frac{\frac{[p] \quad q}{p \vee q} [\vee I] \quad \frac{[p] \quad q}{p \vee q} [\vee I]}{\neg \neg p} [\neg E] \quad \frac{\neg \neg p}{p} [\neg E] \quad \frac{p}{p} [\neg I] \quad \frac{\neg \neg (p \vee \neg p)}{p \vee \neg p} [\neg E]$$

15. Antag att satsen är sann. Då säger den att den är falsk. Så kan det inte vara.

Antag istället att satsen är falsk. Då måste motsatsen till påståendet vara sant, dvs att satsen är sann. Åter en motsägelse.

Vissa påståenden är tydligen varken sanna eller falska.

Lösningar till aktiviteter i kapitel 3

1. a $\exists n . i = 2n$

b $\forall n . n^2 \geq n$

c $\exists n . n^2 = n$

2. a $\forall n . \forall m . n + m = m + n$

b $\forall n . (\exists k . (n = 2k)) \rightarrow (\exists k . (n \cdot n = 2k))$

3.

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}^+ . (\exists \delta \in \mathbb{R}^+ . (\forall x \in D_f . |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \epsilon))$$

Ingen tycker väl att det predikatlogiska uttrycket är lättare att förstå, men det innehåller inga möjligheter till missförstånd och har man lyckats konstruera uttrycket är detta starkt indicium för att man förstått definitionen.

4.

$$\forall i . x_i \leq x_{i+1} \quad \text{elementen är sorterade i växande ordning}$$

$$\forall i . \forall j . i = j \vee x_i \neq x_j \quad \text{alla elementen är olika}$$

$$\exists i . \forall j . i \neq j \rightarrow x_i < x_j \quad \text{det finns ett unikt minsta element}$$

$$\forall i . x_i = y_i \quad \text{vektorerna är lika}$$

5. a $\forall i . \exists j . x_i = y_j$

b $\forall i . x_i < y_i$

c $\forall i . \forall j . x_i < y_j$

d $\forall i . \forall j . x_i > y_j$

6. $(\forall n . n > 0) \vee (\underline{n} = 0)$

7.

$$(e_1[x \setminus t] + e_2[x \setminus t]) \quad (e_1[x \setminus t]) + (e_2[x \setminus t])$$

Den skall ha högre precedens.

8.

$$(x \cdot x)[x \setminus x + 1] = (x + 1) \cdot (x + 1)$$

$$(y \cdot x)[x \setminus y + 1] = (y \cdot (y + 1))$$

$$(x \cdot x)[x \setminus x + 1][x \setminus x + 1] = ((x + 1) \cdot (x + 1))[x \setminus x + 1] = (x + 1 + 1) \cdot (x + 1 + 1)$$

9. En konjunktion av 0 predikat skall ha värdet \top och disjunktion F .

Lösningar till aktiviteter i kapitel 4

1.

$$|\{1, 3, 1, 5\}| = 3$$

$$|\{\emptyset\}| = 1$$

2. a $\{n \in \mathbb{N} \mid \forall k \in \mathbb{N}. k * 3 \neq n\}$

b $\{p \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}. (m = 1) \vee (m = p) \vee \forall k. (m \cdot k \neq p)\}$

3.

$$(\forall i. \forall j. (i \neq j) \rightarrow (A_i \cap A_j = \emptyset)) \wedge (\forall a \in A. \exists i. a \in A_i) \wedge (\forall i. (A_i \neq \emptyset))$$

Alla kvantifieringar är över mängden $\{1, \dots, n\}$.

Lösningar till aktiviteter i kapitel 8

1. Potensmängden till \mathbb{N} , $P(\mathbb{N})$

Lösningar till aktiviteter i kapitel 9

1.

$$f(n) \triangleq \begin{cases} n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ -(n+1)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

2.

q	σ	$T(q, \sigma)$
s	\sqcup	(s, \mathbb{L})
s	$\$$	$(h, \$)$

Lösningar till aktiviteter i kapitel 10

1.

$$f(n) \triangleq \begin{cases} n/2 & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ -(n+1)/2 & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

2.

q	σ	$T(q, \sigma)$
s	\sqcup	(s, \mathbb{L})
s	$\$$	$(h, \$)$