

Lösningar

1 a. $((((p \wedge q) \vee r) \rightarrow (\neg s \vee t)) \leftrightarrow u)$

b. $(p \wedge (q \vee (r \rightarrow (\neg(s \vee (t \leftrightarrow u))))))$

- 2 a. Låt p stå för $x > 0$,
 q för $y < 0$,
 r för $x < 0$,
 s för $y > 0$ och
 t för produkten av x och y är mindre än 0.

(a) $p \wedge q \rightarrow t$

(b) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \rightarrow t$

(c) $(p \wedge q) \vee (r \wedge s) \leftrightarrow t$

3 a. $\text{Multipleof3}(n) \triangleq \exists k \in \mathbb{N}. (k \cdot 3 = n)$.

b. $\text{Multipleof}(i, n) \triangleq \exists k \in \mathbb{N}. (k \cdot i = n)$.

c. $\text{prime}(n) \triangleq \forall i. \text{Multipleof}(i, n) \rightarrow (i = 1) \vee (i = n)$

4 a. $\exists x. \exists y. \neg Q(x, y)$

b. $\forall x. \forall y. \neg Q(x, y) \rightarrow P(x, y) \vee P(y, x)$

c. $\neg \exists x. \forall y. P(y, x) \vee Q(x, y)$

d. $\exists x. \forall y. Q(x, y)$

5 a. $r \triangleq$ riksbankens reporänta höjs

$u \triangleq$ statens utgifter ökar

$a \triangleq$ arbetslösheten ökar

$s \triangleq$ skatterna minskar

$P \triangleq \neg r \rightarrow u \vee a$

$Q \triangleq \neg u \rightarrow s$

$R \triangleq s \wedge \neg r \rightarrow \neg a$

$S \triangleq \neg r \rightarrow u$

- b. r, s, a och u kan anta två värden oberoende av varandra. Det blir $2^4 = 16$ olika alternativ och lika många rader. Notera att P, Q, R och S inte är oberoende.

- c. Om $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S$ är falskt så måste P, Q och R vara sanna medan S är falskt.

Om S är falskt så måste r och u vara falska.

Om dessutom Q är sant så måste s vara sant.

Om dessutom R är sant så måste a vara falskt.

Då kan inte P vara sant. Slutsatsen blir att $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S$ alltid är sant.

- 6 a. Sanningstabeller för de två uttrycken ger svaret. Det finns två fall när uttrycken är olika, $p = \text{F}, q = \text{T}, r = \text{F}$ och $p = \text{F}, q = \text{F}, r = \text{F}$. Det är tillräckligt att ange det ena.

- b. Det finns två fall när uttrycken är olika, $p = \text{T}, q = \text{F}, r = \text{T}$ och $p = \text{F}, q = \text{T}, r = \text{F}$.

7 a.

$$\frac{\frac{\frac{[\neg(p \vee \neg p)]}{p \vee q} [\vee I]}{[\neg(p \vee \neg p)]} [\neg I]}{\frac{\neg p}{p \vee \neg p} [\vee I]} [\neg I]}{\frac{\neg\neg(p \vee \neg p)}{p \vee \neg p} [\neg E]} [\neg E]$$

b.

$$\frac{\frac{[p] \quad p \rightarrow q \wedge r}{q \wedge r} [\wedge E]}{q} [\wedge E]}{\frac{q \rightarrow s}{s} [\rightarrow E]} [\rightarrow E]}{\frac{s}{p \rightarrow s} [\rightarrow I]} [\rightarrow I]$$

c.

$$\frac{\frac{[\neg p] \quad p \rightarrow q}{q} [\rightarrow E]}{[\neg q]} [\neg I]}{\frac{\neg p}{\neg q \rightarrow \neg p} [\rightarrow I]} [\rightarrow I]$$

d.

$$\frac{\frac{\neg p \rightarrow \neg q}{\neg q} [\rightarrow E]}{[\neg p]} [\neg I]}{\frac{\neg\neg p}{p} [\neg E]} [\neg E]}{\frac{p}{q \rightarrow p} [\rightarrow I]} [\rightarrow I]$$

8 a. Formen på påståendet indikerar att beviset avslutas med \rightarrow -introduktion. Vi startar med ett hypotetiskt antagande $[p]$. Sedan finns det inte mycket att välja på.

$$\frac{\frac{[\neg p]}{p \vee q} [\vee I]}{p \rightarrow p \vee q} [\rightarrow I]}$$

b.

$$\frac{\frac{[p \wedge q]}{p} [\wedge E]}{p \wedge q \rightarrow p} [\rightarrow I]}$$

c.

$$\frac{\frac{p \rightarrow q}{q} [\rightarrow E]}{\neg p} [\neg I]}$$

d.

$$\frac{\frac{p \rightarrow q \quad [p]}{q} [\rightarrow E] \quad \frac{[\neg q]}{[\neg I]}}{\frac{\neg p}{\neg q \rightarrow \neg p} [\rightarrow I]}$$

9 a.

$$\frac{\frac{\neg(\exists x.P(x)) \quad \frac{[P(x)]}{\exists x.P(x)} [\exists I]}{[\neg I]}}{\frac{\neg P(x)}{\forall x.\neg P(x)} [\forall I]}$$

b.

$$\frac{\frac{\neg(\forall x.P(x)) \quad \frac{[P(x)]}{\forall x.P(x)} [\forall I]}{[\neg I]}}{\frac{\neg P(x)}{\exists x.\neg P(x)} [\exists I]}$$