Lunds tekniska högskola
Datavetenskap
Lennart Andersson

Diskreta strukturer – Övning vecka 7

1 Beräkna $\overline{\rho}$, ρ^{-1}, ρ^2, ρ^0 och ρ^* för följande relationer. Svaren ges som mängder av par.

a. $\rho \triangleq \{(0,1),(1,2),(2,0)\}$ på mängden $\{0,1,2\}$.

b. $\rho \triangleq \{(0,1),(1,0)\}$ på mängden $\{0,1\}$.

c. $\rho \triangleq \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,0)\}$ på mängden $\{0,1,2\}$.

2 Låt A vara en godtycklig icketom mängd.

a. $\emptyset$ är en binär relation på A. Är den reflexiv, symmetrisk eller transitiv?

b. $A \times A$ är en binär relation på A. Är den reflexiv, symmetrisk eller transitiv?

c. Låt $=$ vara likhetsrelationen på A? Vad är inversen $=^{-1}$, motsatsen $\overline{=}$, och transitiva höljet $=^*$ till denna relation?

d. Vad är inversen, motsatsen och transitiva höljet till relationen $\neq$ på A?

3 Låt P och Q vara Java-klasser och låt ρ vara en relation på mängden av alla Java-klasser så att $P\,\rho\,Q$ betyder att namnet på klassen Q förekommer i implementeringen av P. Uttryck relationen $P\,\tau\,Q$ som betyder att Q behövs för att man skall kunna kompilera P.

4 Låt $\mathbb{N}_k \triangleq \{n \in \mathbb{N} \mid n < k\}$ och $\text{divides}(i,n) \triangleq \exists m \in \mathbb{N}\,.\,(i \cdot m = n)$.

a. Definiera relationen divides på $\mathbb{N}_4$ genom att räkna upp det par av element som är relaterade.

b. Är relationen divides på $\mathbb{N}$ reflexiv, symmetrisk eller transitiv?

c. Låt ρ vara den relation som definierades i a. Vad är ρ^2? Ge svaret genom att räkna upp alla par i den sammansatta relationen.

d. Låt $\rho \triangleq \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid i+1=j\}$. Vad är $\rho^\star$?

5 **a.** Definiera funktionen $and(p,q) \triangleq p \wedge q$ på $\mathbb{B}$ som en mängd av par.

b. Definiera funktionen $lessthan(n,m) \triangleq n < m$, där $n, m \in \{0,1\}$, som en mängd av par.

c. Hur många funktioner finns det i $(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \to \mathbb{B}$?

6 Mängden av alla funktioner från A till B betecknas $A \to B$. Detta innebär att funktionen $suc(n) \triangleq n+1$ på de naturliga talen tillhör $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dvs $suc \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Vi säger att suc har typen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

a. Vilken typ har funktionen $add(x,y) \triangleq x+y$ på de reella talen?

b. Vilken typ har funktionen $lessthan(x,y) \triangleq x < y$ då x och y är reella tal?

c. Låt $g(f) \triangleq f(0)$, där f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vilken typ har funktionen g?

d. Låt $h(f) \triangleq \int_0^1 f(x)\,dx$, där f är en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$. Vilken typ har funktionen h?

e. Antag att $f \in B \to C$ och $g \in A \to B$. Vilken typ har funktionen $h(f,g) \triangleq f \circ g$?
Anm. Operatorn $\circ$ definieras med $(f \circ g)(x) \triangleq f(g(x))$.

7 Två mängder har samma kardinalitet om det finns en bijektion mellan dem.

a. Konstruera en bijektion från $\mathbb{N}$ till mängden av alla jämna naturliga tal.

b. Konstruera en bijektion från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{Z}$, där $\mathbb{Z}$ är mängden av alla hela tal. Det är tillräckligt att ange hur man kan räkna upp elementen i $\mathbb{Z}$ på ett systematiskt sätt så att tal kommer med.

c. Konstruera en bijektion från $\mathbb{N}$ till $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Det är tillräckligt att ange hur man kan räkna upp elementen i $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ på ett systematiskt sätt så att alla par kommer med.

d. Konstruera en bijektion från $[0,1)$ till $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.