Lunds Tekniska Högskola
Datavetenskap
Lennart Andersson

Diskreta strukturer – Övning vecka 5

Övningsuppgifterna i momentet Diskreta strukturer har en annan karaktär än de som diskuterades i Principer och mönster. Normalt är en lösning rätt eller fel, även om det kan finnas flera riktiga lösningar. Uppgifter markerade med asterisk studeras i mån av tid.

Det utgår ingen bonus för övningarna i Diskreta strukturer. Lösningar till uppgifterna kommer att publiceras på hemsidan.

1 Vi använder konventionen att precedensen för operatorerena är i ordning från högst till lägst $\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$.

a. Använd denna konvention för att sätta ut alla parenteser i

$$p \wedge q \vee r \rightarrow \neg s \vee t \leftrightarrow u$$

b. Gör samma sak under förutsättningen att precedensen är den omvända, dvs att $\leftrightarrow$ har högst och $\neg$ lägst precedens.

2 Betrakta följande påståenden som satslogiska formler.

A Produkten av x och y är mindre än 0 om $x > 0$ och $y < 0$.

B Produkten av x och y är mindre än 0 om $x > 0$ och $y < 0$ eller om $x < 0$ och $y > 0$.

C Produkten av x och y är mindre än 0 precis då $x > 0$ och $y < 0$ eller $x < 0$ och $y > 0$.

a. Introducera satslogiska variabler för de elementära påståendena i A-C.

b. Formulera A-C som satslogiska formler.

3 **a.** Definiera ett predikat Multipleof3(n) som är sant precis då n är en multipel av 3. Du får inte använda en operator för heltalsdivision, men väl multiplikation.

b. Definiera ett predikat Multipleof(i, n) som är sant precis då n är en multipel av i.

c. Ett naturligt tal är ett primtal om det bara är delbart med 1 och sig själv. Formulera ett predikat som är sant precis då p är ett primtal. Använd Multipleof.

4 Använd $P(x, y) \triangleq x < y$ och $Q(x, y) \triangleq (x = y)$, där $x, y \in \mathbb{R}$, för att formulera följande påståenden som predikatlogiska uttryck. Det får inte finnas fria variabler i uttrycken.

a. Det finns två olika tal.

b. Om två tal är olika så är det ena mindre än det andra.

c. Det finns inget största tal.

d. Det finns exakt ett tal. (Detta är inte sant.)

5 Följande påståenden aktualiseras av den ekonomiska osäkerheten.

(P) om riksbankens reporänta inte höjs så kommer statens utgifter att öka eller så kommer arbetslösheten att öka

(Q) om statens utgifter inte ökar så kommer skatterna att minska

(R) om skatterna minskas och riksbankens reporänta inte höjs så kommer arbetslösheten inte att öka

(S) om riksbankens reporänta inte höjs så kommer statens utgifter att öka

a. Inför fyra satslogiska variabler så att man kan formulera dessa påståenden. Variablerna skall stå för enkla påståenden som inte är negerade. Formulera P.

b. Formulera Q, R och S.

c. Hur många rader finns det i en sanningstabell när man har fyra oberoende variabler?

d*. Visa att $P \land Q \land R \to S$ är en tautologi utan att konstruera hela sanningstabellen genom att visa att det inte går att hitta värden på variablerna så att uttrycket blir falskt.

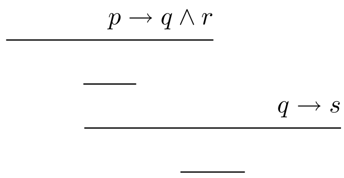
6 Visa att följande räknelag **inte** gäller:

a. $(p \to q) \to r = p \to (q \to r)$

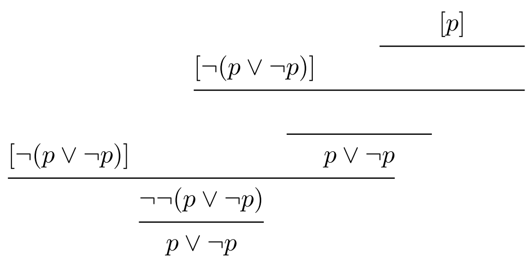
b. $(p \land q) \to r = (p \to r) \land (q \to r)$

7 Visa följande sekventer genom att komplettera tillhörande bevisträd och indikera vilken inferensregel som använts i varje nod.

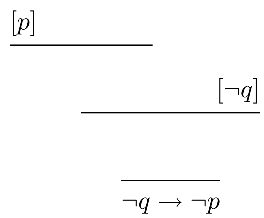
a. $\{p \to q \land r, q \to s\} \vdash p \to s$



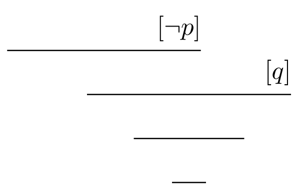
b. $\vdash p \lor \neg p$



c. $\{p \to q\} \vdash \neg q \to \neg p$



d. $\{\neg p \to \neg q\} \vdash q \to p$



8 Konstruera ett härledningsträd för

a. $\vdash p \to p \lor q$.

b. $\vdash p \land q \to p$.

c. $\{p \to q, \neg q\} \vdash \neg p$.

d. $\{p \to q\} \vdash \neg q \to \neg p$.

9 Konstruera ett härledningsträd för

a. $\{\neg(\exists x.P(x))\} \vdash \forall x.\neg P(x)$

b. $\{\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists x.\neg P(x)\}$

Inferensregler

Regler för $\land$

$$\frac{P \qquad Q}{P \land Q}\,[\land_I] \qquad \frac{P \land Q}{P}\,[\land_{E_1}] \qquad \frac{P \land Q}{Q}\,[\land_{E_2}]$$

Regler för $\to$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{[P]}\\ \vdots\\ Q\end{array}}{P \to Q}\,[\to_I] \qquad \frac{P \qquad P \to Q}{Q}\,[\to_E]$$

Regler för $\lor$

$$\frac{P}{P \lor Q}\,[\lor_{I_1}] \qquad \frac{Q}{P \lor Q}\,[\lor_{I_2}] \qquad \frac{P \lor Q \qquad \begin{array}{c}\cancel{[P]}\\ \vdots\\ R\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{[Q]}\\ \vdots\\ R\end{array}}{R}\,[\lor_E]$$

Regler för $\neg$

$$\frac{\begin{array}{c}\cancel{[P]}\\ \vdots\\ R\end{array} \qquad \begin{array}{c}\cancel{[P]}\\ \vdots\\ \neg R\end{array}}{\neg P}\,[\neg_I] \qquad \frac{\neg\neg P}{P}\,[\neg_E]$$

Regler för $\forall$

$$\frac{P}{\forall x \,.\, P}\,[\forall_I] \qquad \frac{\forall x \,.\, P}{P[x\backslash t]}\,[\forall_E]$$

Regler för $\exists$

$$\frac{P[x\backslash t]}{\exists x \,.\, P}\,[\exists_I] \qquad \frac{\exists x \,.\, P \qquad \begin{array}{c}\cancel{[P[x\backslash y]]}\\ \vdots\\ Q\end{array}}{Q}\,[\exists_E]$$

$\begin{array}{c}\cancel{[P]}\\ \vdots\\ Q\end{array}$ i en regel betyder att man har gjort ett (hypotetiskt) antagande P för att härleda Q och att antagandet upphävs (strykes) när man använder regeln. Det hypotetiska antagandet får finnas noll eller flera gånger i beviset av Q.

När man använder $\forall_I$ så får beviset av P inte innehålla några icke upphävda antaganden om x.

I $\exists_E$ får y inte vara en fri variabel i Q eller förekomma i ett icke upphävt antagande i $\begin{array}{c}\cancel{[P[x\backslash y]]}\\ \vdots\\ Q\end{array}$