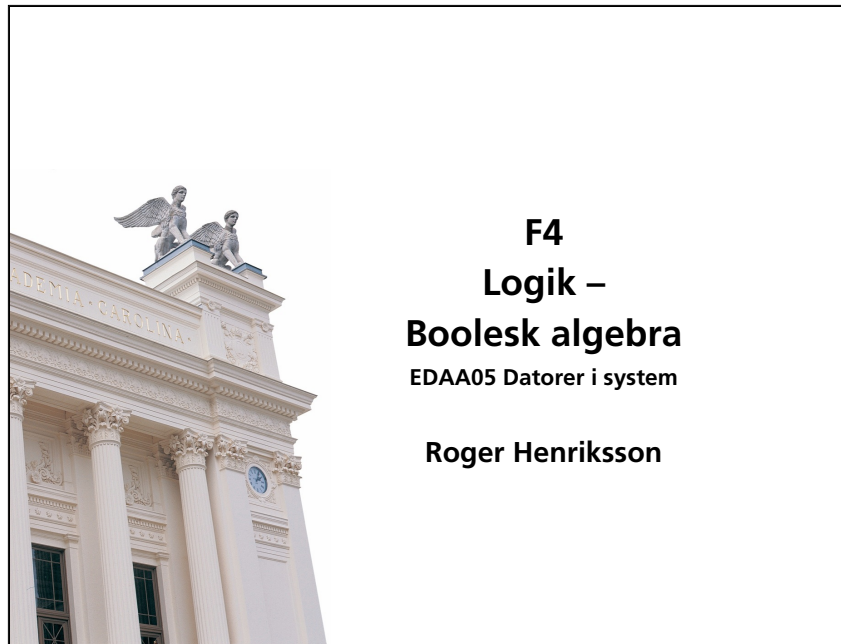




Logik

Konsten att, och vetenskapen om, att resonera och dra slutsatser.

- Vad behövs för att man ska kunna dra en slutsats?
- Hur kan man dra slutsatser ur givna villkor?
- Hur kan villkor formuleras och hur relaterar de sig till varandra?

I den matematiska logiken studerar man logik med matematiska verktyg – ställa upp villkor, bevisa samband, dra slutsatser – allt med ett formellt språk.

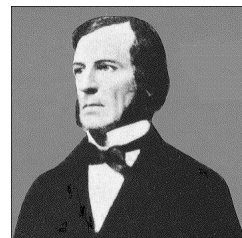


Boolesk algebra

Lite förenklat kan man säga att Boolesk algebra är räkneregler konstruerade för att kunna räkna med logiska uttryck.

Praktiska applikationer för er som datateknikstudenter inom

- programmering – formulera och arbeta med villkor (EDA016,...)
- digitalteknik – grunden för konstruktion av digitala system (EIT020,...)



George Boole (1815-1864)



Logiska operationer

Operationer

I den Booleska algebran har man tre grundläggande operationer: "och", "eller" och "icke".

Med dessas hjälp sätter vi samman påståenden till mera komplexa påstående.

Exempel:

"Jag tar ett paraply med mig på morgonen OM, OCH ENDAST OM, det regnar ELLER prognosen spår regn OCH om jag INTE tar bilen."

Vanligt språk är dock ofta inte entydigt, så vi behöver ett mer formellt uttryckssätt.

Tar jag paraply om det regnar och jag tar bilen?



Notation för Booleska operationer

I den Booleska algebran använder vi följande notation för de tre grundläggande operationerna:

OCH: $\wedge$

ELLER: $\vee$

ICKE: $\neg$

Vi kan skriva villkoret för att jag tar med paraply som
 $(\neg(\text{tar bilen})) \wedge ((\text{prognosen spår regn}) \vee (\text{det regnar}))$

Användandet av parenteser ger entydighet.



Variabler

Som i vanlig algebra har man variabler, men dessa kan här bara anta värdena 0 eller 1 – falskt respektive sant.

En Boolesk variabel, eller påstående, kan motsvara olika saker som kan vara sanna eller falska:

- Påståenden, som t.ex. "det regnar".
- Logiska uttryck i Java som $x==1$, $y>z$.
- etc...

Praktiskt att definiera påståenden/uttryck i variabler:

r : *det regnar*

p : $x==1$



Paraplyexemplet med variabler

Vi börjar med att definiera våra variabler:

r : *det regnar*

s : *väderprognosen spår regn*

b : *jag tar bilen*

p : *jag tar med ett paraply på morgonen*

Vi kan nu skriva vårt påstående om paraplyet som:

$$p = (\neg b) \wedge (s \vee r)$$



Operationernas prioritet

Precis som i vanlig matematik har operationerna en inbördes prioritet. Denna är:

1. ICKE, $\neg$ (högst prioritet)
2. OCH, $\wedge$
3. ELLER, $\vee$ (lägst prioritet)

Nu kan vi ytterligare förenkla vårt paraplyuttryck:

$$p = \neg b \wedge (s \vee r)$$



Sanningstabeller för OCH, ELLER och ICKE

OCH

$$r = a \wedge b$$

a	b	r
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

ELLER

$$r = a \vee b$$

a	b	r
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

ICKE

$$r = \neg a$$

a	r
0	1
1	0



Grundläggande räkneregler

Identitet

$$x \vee 0 = x$$

$$x \wedge 1 = x$$

Ett och nollagen

$$x \vee 1 = 1$$

$$x \wedge 0 = 0$$

Inverslagen

$$x \wedge \neg x = 0$$

$$x \vee \neg x = 1$$

Kommutativa lagen

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

Associativa lagen

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$$

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

Distributiva lagen

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$



Förenkling av uttryck mha räkneregler

Med hjälp av räkneregler kan vi skriva om och förenkla uttryck.

Exempel, förenkla uttrycket $p \vee q \wedge p$:

$$p \vee q \wedge p = 1 \wedge p \vee q \wedge p \text{ (identitetsregeln)}$$

$$1 \wedge p \vee q \wedge p = (1 \wedge p) \vee (q \wedge p) \text{ (tydligare...)}$$

$$(1 \wedge p) \vee (q \wedge p) = (p \wedge 1) \vee (p \wedge q) \text{ (kommutativa lagen)}$$

$$(p \wedge 1) \vee (p \wedge q) = p \wedge (1 \vee q) \text{ (distributiva lagen)}$$

$$p \wedge (1 \vee q) = p \wedge 1 \text{ (ett och nollagen)}$$

$$p \wedge 1 = p \text{ (identitetsregeln)}$$

Precis som i den vanliga matematiken krävs en aning kreativt tänkande och fantasi för att hitta rätt räkneregler.



De Morgans lagar

De Morgans lagar styr negering av uttryck.

"För att negera ett Boolesk uttryck byter man ut OCH mot ELLER (eller vice versa) samt negerar varje enskild term."

De Morgans lagar

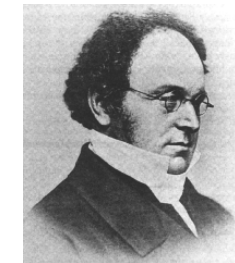
$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$$

$$\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$$

Gäller för godtyckligt antal termer:

$$\neg(a \vee b \dots \vee x) = \neg a \wedge \neg b \dots \wedge \neg x$$

$$\neg(a \wedge b \dots \wedge x) = \neg a \vee \neg b \dots \vee \neg x$$



Augustus de Morgan (1806-1871)



De Morgan och paraplyet

Betrakta påståendet att vi INTE tar ett paraply med oss på morgonen ($\neg p$):

$$\neg p = \neg(\neg b \wedge (s \vee r))$$

Tillämpa De Morgans lagar:

$$\neg p = \neg(\neg b) \vee \neg(s \vee r)$$

Tillämpa De Morgans lagar en gång till...

$$\neg p = \neg(\neg b) \vee \neg s \wedge \neg r$$

...och förenkla uttrycket:

$$\neg p = b \vee \neg s \wedge \neg r$$

"Jag lämnar paraplyet hemma om jag antingen kör bil, eller om det både är uppehållsväder och väderprognosen är god."



De Morgan och mixade uttryck

Uttryck med mixade $\wedge$ och $\vee$ måste göras i flera steg.

Exempel: Vad är $\neg(x \wedge y \vee z)$?

Vi inför parenteser för att göra uttrycket tydligare:

$$\neg(x \wedge y \vee z) = \neg((x \wedge y) \vee z)$$

De Morgans lag:

$$\neg((x \wedge y) \vee z) = \neg(x \wedge y) \wedge \neg z$$

De Morgans lag:

$$\neg(x \wedge y) \wedge \neg z = (\neg x \vee \neg y) \wedge \neg z$$



Bevis med hjälp av sanningstabeller

Sanningstabeller kan användas för att bevisa att två Booleska uttryck är lika.

Exempel: Visa att $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$!

x	y	z	$x \wedge (y \vee z)$	x	y	z	$(x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1



Från sanningstabell till Booleskt uttryck

Vi kan formulera Booleska uttryck utgående från en sanningstabell.

Algoritm:

- Gå igenom varje rad i tabellen där funktionen har värdet 1.
- För varje rad: Skriv ett OCH-uttryck som ger värdet 1 med de aktuella värdena på de ingående variablerna (negera variabler som har värdet noll).
- Sätt ihop alla OCH-uttryck med ELLER-operationer.
- Förenkla eventuellt det resulterande uttrycket.



Från sanningstabell till Booleskt uttryck

Exempel:

Skriv en Boolesk funktion för f i tabellen till höger.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$\neg x \wedge y \wedge \neg z$$

$$x \wedge \neg y \wedge \neg z$$

$$x \wedge y \wedge \neg z$$

$$f = (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge \neg z)$$



Boolesk algebra och villkor i Java

Boolesk algebra kan användas för att förenkla eller skriva om villkor i Java, t.ex. i if-satser.

Exempel:

```
if (minvalue==i || (minvalue==x && minvalue==i)) { ...
```

Påståenden:

$p : \text{minvalue} == i$

$q : \text{minvalue} == x$

Förenkla det motsvarande Booleska uttrycket $p \vee q \wedge p$!

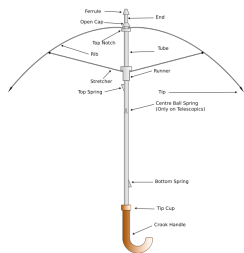
Vi känner igen detta från tidigare: $p \vee q \wedge p = p$!

Alltså kan if-satsen skrivas:

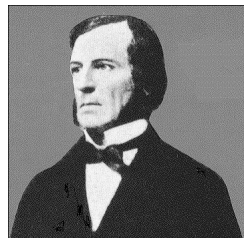
```
if (minvalue==i) { ...
```



George Boole och $\neg$ paraplyet



$$p = \neg b \wedge (s \vee r)$$



George Boole (1815-1864)
Professor i Matematik,
Queens College, Cork, Irland